УДК 517.968.2

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ В КВАДРАТУРАХ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

И.М. Шакирова

Аннотация

В терминах коэффициентов интегральных уравнений типа Вольтерра получены достаточные условия их разрешимости в явном виде. Условия получены путем редукции исходных уравнений к различным вариантам задач Гурса для уравнений второго порядка. Это дало возможность использовать известные решения задач Гурса в квадратурах.

Ключевые слова: уравнения Вольтерра, задача Гурса, функция Римана, решение в квадратурах.

1. Предмет исследования и исходные результаты

В настоящее время получено значительное число результатов по отысканию решений интегральных уравнений в явном виде. Многие из них отражены в справочнике [1], причем большинство результатов относится к уравнениям Фредгольма.

Объектом изучения в настоящей статье являются уравнения, рассматриваемые в области $D = \{x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < y_1\}$, вида

$$u(x,y) + a_1(x,y)\int\limits_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi + a_2(x,y)\int\limits_{y_0}^{y} b_2(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta = F(x,y), \qquad (1)$$

$$\alpha(x,y)u(x,y) + \beta(x,y)\left[\int\limits_{x_0}^{x} A(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} B(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right] = F(x,y). \qquad (2)$$

Оба они являются частными случаями уравнения Вольтерра

$$u(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y,\xi)u(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} K_2(x,y,\eta)u(x,\eta)|,d\eta +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi = F(x,y), \qquad (3)$$

встречающегося, например, в задаче об изгибе тонкой сферической оболочки [2, с. 279, формула (62.12)]. Для непрерывных коэффициентов уравнений (1), (2) известна теорема существования единственного решения [2, с. 18; 3, с. 180].

С целью отыскания условий, обеспечивающих построение решений (1), (2) в явном виде, мы сводим эти уравнения к известной задаче Гурса [4, с. 172], для которой ранее найдены [5–7] различные варианты условий ее разрешимости в квадратурах. Эти условия записываются в терминах коэффициентов уравнения

$$w_{xy} + aw_x + bw_y + cw = f. \tag{4}$$

Они и представляют собой указанные в названии данного параграфа исходные результаты, дающие возможность найти функции Римана для (4), что, в свою очередь, в силу упомянутой выше формулы (62.12) из [4] приводит к представлению решений соответствующих задач Гурса через интегралы от известных функций.

Перечислим здесь эти результаты.

В [5, с. 15–16] приведены функции Римана уравнения (4), когда выполняется одно из тождеств

$$h \equiv a_x + ab - c \equiv 0, \quad k \equiv b_y + ab - c \equiv 0, \tag{5}$$

а в [6] указана функция Римана для этого же уравнения в предположении, что имеют место два тождества

$$a_x \equiv b_y, \quad a_x + ab - c \equiv p(x)q(y). \tag{6}$$

Здесь p, q – любые непрерывные функции, вторая формула в (6) раскрывает структуру конструкции, стоящей в левой части первого из тождеств (5).

В [7] обсуждаемые условия записаны с помощью следующих соотношений:

$$b_y - a_x \equiv h \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0, \tag{7}$$

$$a_x - b_y \equiv k \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0, \tag{8}$$

$$ma_x - b_y \equiv mb_y - a_x \equiv (m-1)(ab - c), \tag{9}$$

$$\omega \equiv \frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2}, \quad s'(x)t'(y) \neq 0, \quad s(x) + t(y) \neq 0. \tag{10}$$

Здесь h, k имеют вид (5), $\alpha_r,\, \beta_r \in C^1$, $s,\, t,\, m \in C^2$, причем функция m зависит лишь от одной из переменных (x, y) и не принимает значение 2, а классы гладкости C^1, C^2 задаются на замкнутых множествах определения соответствующих функций.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $hk \neq 0$ и существуют функции α_k, β_k, m, s, t указанных выше классов, для которых имеет место хотя бы одна из групп соотношений* (7), (8) *(или при выполнении тождеств* (9) *хотя бы одна из комбинаций h, k имеет вид ω из* (10)*). Тогда функция Римана для уравнения* (5) *записывается в явном виде.*

2. Условия разрешимости уравнения (1) в квадратурах

Будем рассматривать данное уравнение при условии

$$a_1(x,y)b_1(x,y)a_2(x,y)b_2(x,y) \neq 0. \tag{11}$$

Разделим (1) на a_1, продифференцируем получаемое соотношение по x и заменим искомую функцию $u(x,y)$ на функцию $z(x,y)$ по формуле

$$z(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} b_2(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что функция $z(x,y)$ удовлетворяет уравнению вида (4)

$$z_{xy} + A_1 z_x + B_1 z_y + C_1 z = F_1, \tag{13}$$

где

$$A_1 = a_2 b_2, \quad B_1 = a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x, \quad C_1 = b_2[a_{2_x} - a_2(\ln a_1)_x],$$
$$F_1 = b_2[F_x - F(\ln a_1)_x]. \tag{14}$$

Из (1) имеем для $z(x_0,y) = \varphi(y)$ соотношение

$$\varphi(y) + a_2(x_0,y)\int\limits_{y_0}^{y} b_2(x_0,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = F(x_0,y),$$

очевидным образом сводящееся к

$$\varphi' + [a_2 b_2 - (\ln a_2)_y]\,\varphi = a_2\left(\frac{F}{a_2}\right)_y.$$

Решая это уравнение, например, с помощью метода интегрирующего множителя и учитывая (12), находим для (13) граничные условия Гурса

$$\begin{aligned} &z(x,y_0) = 0,\\ &z(x_0,y) = a_2(x_0,y)\int\limits_{y_0}^{y}\left[\frac{F(x_0,\eta)}{a_2(x_0,\eta)}\right]_\eta \exp\left(\int\limits_{y}^{\eta} a_2(x_0,\eta_1)b_2(x_0,\eta_1)\,d\eta_1\right)d\eta \end{aligned} \tag{15}$$

С целью обоснования проведенных рассуждений следует к (11) добавить включения a_1, a_2, $b_2 \in C^{1,0}(\overline{D})$.

Если сначала поделить (1) на a_2, затем продифференцировать по y и сделать замену, аналогичную (12):

$$v(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} b_1(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi, \tag{16}$$

то придем к уравнению

$$v_{xy} + A_2 v_x + B_2 v_y + C_2 v = F_2, \tag{17}$$

$$A_2 = a_2 b_2 - [\ln(a_2 b_1)]_y, \quad B_2 = a_1 b_1, \quad C_2 = b_1[a_{1y} - a_1(\ln a_2)_y],$$
$$F_2 = b_1[F_y - F(\ln a_2)_y] \tag{18}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &v(x_0,y) = 0,\\ &v(x,y_0) = a_1(x,y_0)\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{F(\xi,y_0)}{a_1(\xi,y_0)}\right]_\xi \exp\left(\int\limits_{x}^{\xi} a_1(\xi_1,y_0)b_1(\xi_1,y_0)\,d\xi_1\right)d\xi. \end{aligned} \tag{19}$$

В этом случае следует дополнительно к (11) считать, что a_1, b_1, $a_2 \in C^{0,1}(\overline{D})$.

Уравнение (1) можно преобразовать еще двумя способами, поменяв порядок проведенных выше действий: сначала сделать замену (12) или (16), а потом избавиться от оставшегося интеграла путем дифференцирования. Однако результат будет тот же самый: получится либо задача (13), (15), либо (17), (19). Сохраняются и условия гладкости на коэффициенты уравнения (1).

Теперь для получения условий разрешимости задачи (13), (15) в квадратурах нужно в соотношениях (5)–(10) положить $a = A_1$, $b = B_1$, $c = C_1$ из (14) и применить теорему 1. Тождества (5), (6) приобретают тогда вид

$$a_1 b_1 a_2 b_2 \equiv 0, \tag{20}$$

$$\{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y + a_1 b_1 a_2 b_2 - (a_2 b_2)_x \equiv 0, \tag{21}$$

а (6) переходят в соотношения

$$(a_2 b_2)_x \equiv \{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y, \tag{22}$$

$$a_1 b_1 a_2 b_2 \equiv p(x) q(y). \tag{23}$$

Формулы (7)–(9) запишутся соответственно следующим образом

$$\{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y - (a_2 b_2)_x \equiv a_1 b_1 a_2 b_2 \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}(a_2 b_2)_x - \{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y \equiv \{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y + \\ + a_1 b_1 a_2 b_2 - (a_2 b_2)_x \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}m(a_2 b_2)_x - \{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y \equiv m\{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y - (a_2 b_2)_x \equiv \\ \equiv (m-1)\{a_1 b_1 a_2 b_2 - (a_2 b_2)_x\},\end{aligned} \tag{26}$$

При этом одновременно с выполнением тождества (26) хотя бы одна из конструкций (5) должна иметь вид ω из (10).

Учтем также, что в (7)

$$u(x_0, y) = \varphi(y) \in C^2[y_0, y_1], \tag{27}$$

а для A, B, C, F имеют место включения

$$A \in C^{(2,1)}, \quad B \in C^{(1,2)}, \quad C \in C^{(1,1)}, \quad F \in C^{(0,1)} \bigcap C^{(1,0)}, \tag{28}$$

выполняющиеся в области $\overline{D}$.

С помощью формул (14), (15) убеждаемся, что для (27), (28) достаточно условий

$$a_1, b_2 \in C^{(2,2)}, \quad a_2 \in C^{(2,1)}, \quad b_1 \in C^{(1,2)}, \quad f \in C^{(2,1)}. \tag{29}$$

Заметим, что в силу (11) тождество (20) не выполняется, а при заданном значении z исходная искомая функция $u(x, y)$ определяется формулой $u = z_y / b_2$, вытекающей из (12).

Таким образом, наряду с (11), (29) важными для нас являются следующие требования.

1°. Выполняется тождество (21).

2°. Имеет место тождество (22) и найдутся функции $p(x)$, $q(y)$, при которых удовлетворяется соотношение (23).

3°. Вместе в неравенством $hk \neq 0$ существуют функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$, $i = 1, 2$ при которых верен хотя бы один из двух наборов (24), (25).

4°. При этом же неравенстве $hk \neq 0$ могут быть определены функции s, t, m указанных выше классов, с помощью которых при выполнении тождеств (26) хотя бы одна из конструкций

$$a_1 b_1 a_2 b_2, \quad \{a_1 b_1 - [\ln(a_1 b_2)]_x\}_y + a_1 b_1 a_2 b_2 - (a_2 b_2)_x$$

принимает вид ω из (10).

А именно, справедлива

Лемма 1. *Для разрешимости уравнения* (1) *в квадратурах достаточно, чтобы наряду с условиями* (11), (29) *выполнялось хотя бы одно из условий* 1° –4°.

Для $A_2,\ B_2,\ C_2$ из (17), (18) можно провести рассуждения по схеме, изложенной выше для $A_1,\ B_1,\ C_1$. Запишем здесь условия гладкости на коэффициенты исходного уравнения

$$a_2, b_1 \in C^{(2,2)}, \quad a_1 \in C^{(1,2)}, \quad b_2 \in C^{(2,1)}, \quad f \in C^{(2,1)}. \tag{30}$$

При этом вместо 1°–4° будем рассматривать следующие условия.

5°. Выполняется тождество $(a_2b_2)_x + a_1b_1a_2b_2 - (a_1b_1)_y - [\ln(a_2b_1)]_{yx} \equiv 0$.

6°. Имеет место тождество $(a_2b_2)_x - [\ln(a_2b_1)]_{yx} \equiv (a_1b_1)_y$ и найдутся функции $p,\ q$, для которых выполнено соотношение

$$(a_2b_2)_x + a_1b_1a_2b_2 - (a_1b_1)_y - [\ln(a_2b_1)]_{yx} \equiv p(x)q(y).$$

7°. При $hk \neq 0$ существуют функции $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$, $i = 1, 2$, для которых справедливо хотя бы одно из условий

$$(a_1b_1)_y - (a_2b_2)_x + [\ln(a_2b_1)]_{yx} \equiv (a_2b_2)_x + a_1b_1a_2b_2 - (a_1b_1)_y - [\ln(a_2b_1)]_{yx}$$

или

$$(a_2b_2)_x - [\ln(a_2b_1)]_{yx} - (a_1b_1)_y \equiv a_1b_1a_2b_2.$$

8°. При $hk \neq 0$ могут быть определены функции $s,\ t,\ m$ указанных выше классов, с помощью которых при выполнении тождеств

$$m[(a_2b_2)_x - [\ln(a_2b_1)]_y] - (a_1b_1)_y \equiv m(a_1b_1)_y - (a_2b_2)_x + [\ln(a_2b_1)]_{yx} \equiv$$
$$\equiv (m-1)\{a_1b_1a_2b_2 - (a_1b_1)_y\},$$

хотя бы одна из конструкций $\{a_2b_2 - [\ln(a_2b_1)]_y\}_x + a_1b_1a_2b_2 - (a_1b_1)_y,\ a_1b_1a_2b_2$ принимает вид ω из (10).

Поэтому имеет место

Лемма 2. *Уравнение* (1) *разрешимо в квадратурах, если наряду с условиями* (11), (31) *выполняется хотя одно из условий* 5° –8°.

Из лемм 1, 2 вытекает

Теорема 2. *Уравнение* (1) *разрешимо в квадратурах, если наряду с условиями* (11), (29) (*или* (11), (30)) *выполняется хотя бы одно из условий* 1° –4° (*или* 5° –8°), *а также если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условию* $h \equiv 0$ (*или* $k \equiv 0$).

Нетрудно видеть, что всего в данной теореме содержится 12 вариантов условий разрешимости уравнения (1) в квадратурах.

3. Условия разрешимости уравнения (2) в квадратурах

Поделим уравнение (2) на $\beta(x,y) \neq 0$ и продифференцируем соотношение по x:

$$\frac{\alpha}{\beta}u_x + \left[A + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_x\right]u + \int_{y_0}^{y}[B(x,\eta)u(x,\eta)]_x\,d\eta + \int_{y_0}^{y}C(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta = \left(\frac{F}{\beta}\right)_x \tag{31}$$

Чтобы избавиться от интегралов, стоящих в левой части, и вновь получить задачу Гурса, нужно продифференцировать (31) теперь по y, а затем умножить соотношение на β:

$$u_{xy} + Mu_x + Nu_y + Pu = Q, \tag{32}$$

$$M = B\frac{\beta}{\alpha} + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y, \quad N = A\frac{\beta}{\alpha} + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x,$$

$$P = \frac{\beta}{\alpha}\left[A_y + B_x + C + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}\right], \quad Q = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{F}{\beta}\right)_{xy}.$$

При этом граничные условия имеют вид

$$u(x_0, y) = \frac{\beta(x_0, y)}{\alpha(x_0, y)}\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{F}{\beta}\right)_\eta \exp\left(\int\limits_{y}^{\eta}\frac{B(x_0,\eta_1)\beta(x_0,\eta_1)}{\alpha(x_0,\eta_1)}d\eta_1\right)d\eta,$$

$$u(x, y_0) = \frac{\beta(x, y_0)}{\alpha(x, y_0)}\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{F}{\beta}\right)_\xi \exp\left(\int\limits_{x}^{\xi}\frac{A(\xi_1,y_0)\beta(\xi_1,y_0)}{\alpha(\xi_1,y_0)}d\xi_1\right)d\xi, \tag{33}$$

получаемые так же, как (15).

Условия разрешимости задачи (32), (33) получаются по схеме п. 2. Тождества (5) в данном случае примут вид

$$\left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{yx} + \frac{\beta}{\alpha}[AB\frac{\beta}{\alpha} + A\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y + B\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x -$$
$$- A_y - B_x - C - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}] + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x \equiv 0, \tag{34}$$

$$\left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy} + \frac{\beta}{\alpha}[AB\frac{\beta}{\alpha} + A\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y + B\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x -$$
$$- A_y - B_x - C - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}] + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x \equiv 0. \tag{35}$$

Формулы (6) переходят в

$$\left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x \equiv \left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y,$$

$$\left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{yx} + \frac{\beta}{\alpha}[AB\frac{\beta}{\alpha} + A\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y + B\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x -$$
$$- A_y - B_x - C - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}] + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x = p(x)q(y), \tag{36}$$

а соотношения (7)–(10) запишутся так

$$\left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y - \left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x \equiv \left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy} + \frac{\beta}{\alpha}[AB\frac{\beta}{\alpha} + A\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y + B\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x -$$
$$- A_y - B_x - C - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}] + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0, \tag{37}$$

$$\left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x - \left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y \equiv \left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy} + \frac{\beta}{\alpha}[AB\frac{\beta}{\alpha} + A\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y + B\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x -$$
$$- A_y - B_x - C - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}] + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0, \quad (38)$$

$$m\left[\left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{yx}\right] - \left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y - \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy} \equiv$$
$$\equiv m\left[\left(A\frac{\beta}{\alpha}\right)_y + \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}\right] - \left(B\frac{\beta}{\alpha}\right)_x - \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_{yx} \equiv$$
$$\equiv (m-1)\{\frac{\beta}{\alpha}\left[AB\frac{\beta}{\alpha} + A\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y + B\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x - A_y - B_x - C - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{xy}\right] +$$
$$+ \left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_y\left(\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)_x\}, \quad (39)$$

$$\omega \equiv \frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2}, \quad s'(x)t'(y) \neq 0, \quad s(x)+t(y) \neq 0. \quad (40)$$

В свою очередь, ω из (10) будет принимать одно из двух значений, стоящих в левых частях тождеств (39).

Поэтому имеет место

Теорема 3. *Уравнение* (2) *разрешимо в квадратурах, если выполнено одно из следующих условий.*

1. *Имеет место хотя бы одно условие из тождеств* (34), (35).

2. *Существуют функции* p, q, α_r, β_r, s, t, m, *для которых выполняется хотя бы одна из групп соотношений* (36)–(38), *или при справедливости тождеств* (39) *хотя бы одна из комбинаций в левых частях* (34), (35) *имеет вид* ω *из* (40).

4. Примеры

Приведем примеры уравнений, для которых справедливы рассмотренные в пп. 2, 3 условия. Очевидно, что указанные в теоремах 2, 3 соотношения можно проверить с помощью непосредственных вычислений. С другой стороны, указанные условия можно использовать для построения этих уравнений. Проведем соответствующие рассуждения, например, для вариантов, связанных с леммой 1.

Пусть заданы a_1, b_2, обе функции в силу (11) отличны от нуля. Тогда (21) приобретает вид

$$(a_1b_1)_y + a_2b_1a_1b_2 \equiv (a_2b_2)_x + \sigma(x,y), \quad (41)$$

где $\sigma = [\ln(a_1b_2)]_{xy}$.

Если теперь задать еще a_2, то (40) будет дифференциальным уравнением относительно b_1:

$$b_{1y} + b_1[a_2b_2 + (\ln a_1)_y] \equiv \frac{(a_2b_2)_x + \sigma}{a_1}.$$

Решая его, получим

$$b_1 = \exp\left(-\int\limits_{y_0}^{y} L_1(x,\eta)d\eta\right)\left[\int\limits_{y_0}^{y} M_1(x,\eta)\exp\left(\int\limits_{y_0}^{\eta} L_1(x,\eta_1)\,d\eta_1\right)d\eta + S(x)\right],$$

где $L_1(x,y) = a_2b_2 + (\ln a_1)_y$, $M_1(x,y) = \dfrac{(a_2b_2)_x + \sigma}{a_1}$, а $S(x)$ – произвольная функция.

В случае, когда вместо a_2 задано b_1, найдем

$$a_2 = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} L_2(\xi,y)\,d\xi\right)\left[\int_{x_0}^{x} M_2(\xi,y)\exp\left(\int_{x_0}^{\xi} L_2(\xi_1,y)d\xi_1\right)d\xi + T(y)\right],$$

где $L_2(x,y) = (\ln b_2)_x - a_1b_1$, $M_2(x,y) = \dfrac{(a_1b_1)_y - \sigma}{b_2}$, а $T(y)$ – произвольная функция.

Следовательно, получается целое семейство a_k, b_k, $k = 1,2$, для которых уравнение (1) разрешимо в квадратурах. Обратим внимание, что данное семейство определяется не только путем выбора функций S, T, но и тем, что задание указанных функций из набора a_k, b_k, $k = 1,2$, можно осуществлять бесчисленным множеством способов.

Рассмотрим теперь (22). При заданных a_1, b_2 это соотношение перейдет в (41), только без слагаемого $a_1b_1a_2b_2$ в левой части. Таким образом, опять становится известной либо a_2, либо b_1. Очевидно, что для вычисления недостающей четвертой функции из набора a_k, b_k, $k = 1,2$, можно зафиксировать одну из функций. Тогда при заданной функции a_2 следует положить

$$b_1 = \frac{1}{a_1}\left[\int_{y_0}^{y} M_1(x,\eta)a_1(x,\eta)\,d\eta + S_2(x)\right], \tag{42}$$

а при заданной функции b_1 вместо (42) можно воспользоваться формулой

$$a_2 = \frac{1}{b_2}\left[\int_{x_0}^{x} M_2(\xi,y)b_2(\xi,y)\,d\xi + T_2(y)\right].$$

Проведя такую же процедуру с прочими условиями разрешимости из леммы 1, мы получим семейство a_k, b_k.

Аналогично могут быть выделены примеры для остальных пяти вариантов, связанных с леммой 1. В случае леммы 2 подобные примеры могут быть построены по той же схеме.

В заключение отметим, что содержание настоящей статьи представляет собой развитие указанной в [7] идеи применения теории задачи Гурса к решению интегральных уравнений.

Summary

I.M. Shakirova. Solvability Conditions in Quadratures of Two Volterra Equations.

In terms of the coefficients of Volterra integral equations, sufficient conditions for their explicit solvability are derived. The conditions are obtained by the reduction of the initial equations to various versions of the Goursat problem for equations of second order. This makes it possible to use the known solutions to the Goursat problems in quadratures.

Keywords: Volterra equation, Goursat problem, Riemann function, solution in quadratures.

Литература

1. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. – М.: Физматлит, 2003. – 608 с.
2. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1948. – 296 с.
3. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. Часть 1. Линейные уравнения Вольтерра. – М.; Л.: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. – 330 с.
4. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
5. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшим частными производными. – Казань: Казан. матем. о-во, 2001. – 226 с.
6. *Жегалов В.И.* К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций // Неклассические уравнения матем. физики. – Новосибирск: Ин-т матем. СО РАН, 2002. – С. 73–79.
7. *Жегалов В.И., Сарварова И.М.* К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 3. – С. 68–73.

Поступила в редакцию
05.09.13

Шакирова (Сарварова) Инна Маратовна – аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *inna.sarvarova@yandex.ru*